

ANALISIS KESTABILAN MODEL DISKRIT EKO-EPIDEMIOLOGI

Ani Salamah¹, Novianita Achmad², Nurwan³

^{1,2,3}Program Studi Matematika FMIPA, Universitas Negeri Gorontalo

email korespondensi : ani.mathung@gmail.com

Diterima : (25-09-2020), **Revisi:** (13-11-2020), **Diterbitkan :** (24-12-2020)

ABSTRAK

Penelitian ini membahas tentang model diskrit eko-epidemiologi. Model eko-epidemiologi adalah gabungan dari ilmu ekologi dan epidemiologi yang membahas tentang interaksi antara *predator*, *prey* rentan, dan *prey* terinfeksi menggunakan fungsi respon Holling tipe I dan pertumbuhan *prey* rentan menggunakan fungsi logistik untuk membatasi pertumbuhan yang berlebihan pada *prey* rentan. Model diskrit eko-epidemiologi diperoleh dengan mendiskritisasikan model eko-epidemiologi menggunakan metode Euler. Dari model diskrit tersebut diperoleh 5 titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan E_0 dimana semua populasi mengalami kepunahan, titik kesetimbangan E_1 ketika terjadi kepunahan pada populasi *prey* terinfeksi dan *predator*, titik kesetimbangan E_2 ketika terjadi kepunahan pada populasi *prey* terinfeksi, titik kesetimbangan E_3 ketika terjadi kepunahan pada populasi *predator*, dan titik kesetimbangan E_4 ketika semua populasi hidup berdampingan. Berdasarkan hasil analisisnya, E_0 selalu tidak stabil, hal ini disebabkan oleh nilai eigen yang diperoleh pada persamaan linierisasi model di sekitar titik-titik ekuilibrium tersebut, nilai mutlaknya selalu besar satu. Untuk E_1 , E_2 , E_3 , dan E_4 kestabilan titik-titik kesetimbangan ditentukan oleh suatu syarat dan kondisi tertentu.

Kata kunci : model eko-epidemiologi, model diskrit, analisis kestabilan

ABSTRACT

This study discusses a discrete eco-epidemiological model. The eco-epidemiological model (the combination of ecology and epidemiology) that discusses the interaction between predator and prey as well as the spread of disease in it. The interaction employed the Holling response function type I, while the growth of susceptible prey relied on a logistic function to limit overgrowth in susceptible prey. A discrete eco-epidemiological model was obtained by discretizing the model using the Euler method, in which five equilibrium point were obtained: the equilibrium point E_0 (all populations experience extinction), the equilibrium point E_1 (the extinction occurs in infected and predator populations), the equilibrium point E_2 (the extinction occurs in the prey infected population), the equilibrium point E_3 (the extinction occurs in a predator population), and the equilibrium point E_4 (all populations coexist). Based on the results of analysis, E_0 always unstable. This is due to the eigenvalues obtained in the model linearization equation around the equilibrium points, the absolute value is always large 1. For E_1 , E_2 , E_3 , dan E_4 , the stability of the equilibrium points is determined by certain terms and conditions.

Key words : eco-epidemiology model, discrete model, stability analysis

Pendahuluan

Model eko-epidemiologi merupakan model interaksi antara *predator* dan *prey* dengan adanya penyebaran penyakit pada populasi tertentu. Dimana interaksi antara *predator* dan *prey* dibahas dalam bidang ilmu ekologi, sedangkan penyebaran penyakit pada populasi dijelaskan oleh bidang ilmu epidemiologi.

Model *predator-prey* pertama kali diusulkan oleh Lotka-Volterra pada tahun 1920-1926 yang menjelaskan tentang model pertumbuhan populasi dua spesies. Perkembangan selanjutnya yaitu dengan memodifikasi model *predator-prey* Lotka-Volterra dengan menambahkan fungsi logistik pada populasi *prey*, dimana populasi tersebut tidak akan bertumbuh melewati batas pertumbuhan populasi yang sudah ditentukan. Model ini dikenal dengan model *predator-prey* Gause. Selain menambahkan fungsi logistik pada model, penambahan fungsi respon juga dilakukan untuk membatasi laju predasi oleh *predator* (Murray, 2002).

Untuk penyebaran penyakit, Kermack dan MacKendrick pada tahun 1927 dan 1932 mengusulkan model matematika epidemik yang lebih maju yaitu model SIR yang banyak digunakan saat ini (Brauer dan Castillo-Chavez, 2012). Model SIR ini dapat dimodifikasi menjadi model SI dengan asumsi bahwa populasi yang tereserang penyakit tidak akan bisa sembuh.

Penelitian terkait ekologi dan epidemiologi berkembang secara terus menerus, sehingga terdapat penelitian baru yang menggabungkan kedua penelitian tersebut yang dinamakan model eko-epidemiologi. Model eko-epidemiologi membahas tentang model *predator-prey* dan penyebaran penyakit yang terjadi saat pemangsaan. Beberapa penelitian terkait model ini adalah Xiao dan Chen (2002), Purnomo, dkk. (2017), Siddik (2017), Hasan, dkk. (2020), Arsyad, dkk. (2020) dan Maisaroh, dkk. (2020).

Penelitian yang lainnya juga melakukan modifikasi dengan merubah model kontinu menjadi model diskrit untuk melihat apakah ada perbedaan dari model tersebut. Modifikasi model dilakukan dengan mendiskritisasi model menggunakan metode Euler. Beberapa penelitian terkait model diskrit adalah penelitian Raj, dkk. (2013), Hu, dkk. (2014), Munandar (2017), dan Mokodompit, dkk. (2020). Sehingga pada artikel ini akan membahas tentang analisis kestabilan model diskrit eko-epidemiologi.

Metode Penelitian

Tahapan dalam penelitian ini adalah penelusuran buku, jurnal, artikel, maupun *text-book* yang berhubungan dengan penelitian, menentukan asumsi untuk membentuk model eko-epidemiologi, memodifikasi model menggunakan metode Euler untuk memperoleh model diskrit eko-epidemiologi, menentukan titik kesetimbangan model diskrit eko-epidemiologi dan menganalisisnya.

Hasil dan Pembahasan

Dalam bab ini akan diperoleh model matematika eko-epidemiologi, model diskrit-eko-epidemiologi, titik kesetimbangan, dan analisis kestabilan dari titik.

Model Matematika

Model yang digunakan adalah model *predator-prey* Gause dengan fungsi respon Holling tipe I dan *prey* yang terserang penyakit. Dengan asumsi bahwa populasi *prey* bertumbuh secara logistik yang dipengaruhi oleh daya dukung lingkungan hidup populasi, populasi *predator* terhadap *prey* menggunakan fungsi respon Holling tipe I dimana tidak ada perlawanan oleh *prey* dan populasi *prey* yang terserang penyakit tidak akan bisa sembuh. Sehingga diperoleh model matematika dalam bentuk sistem persamaan diferensial sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 dS/dt &= rS(1 - (S + I)/K) - \beta SI - aSY \\
 dI/dt &= \beta SI - bIY - \alpha I \\
 dY/dt &= cSY + dIY - \delta Y
 \end{aligned} \tag{1}$$

Dengan $r, K, \alpha, \beta, \delta, a, b, c, d > 0$. S menyatakan populasi *prey* rentan, I menyatakan populasi *prey* terinfeksi, Y menyatakan populasi *predator*, r adalah pertumbuhan intrinsik populasi *prey*, K adalah daya dukung lingkungan populasi, α adalah laju kematian *prey* terinfeksi, β adalah koefisien penyebaran penyakit, δ adalah laju kematian *predator*, a adalah laju pemangsaan *predator* terhadap *prey* rentan, b adalah pemangsaan *predator* terhadap *prey* terinfeksi, c adalah jumlah populasi *predator* yang masuk akibat memangsa *prey* rentan, dan d adalah jumlah populasi *predator* yang masuk akibat memangsa *prey* terinfeksi.

Dari model matematika diatas, selanjutnya didiskritisasi menggunakan metode Euler (Elaydi, 2007). Misalkan pada persamaan (1) variabel waktu t dibatasi pada selang $(0, T)$, maka diskritisasi model (1) dilakukan dengan membagi selang $(0, T)$ menjadi N subselang yang sama dengan lebar $h = t_n - t_{n-1}$. Diperoleh $N + 1$ titik dengan $t_n = nh, n = 0, 1, 2, \dots, N$. Sehingga diperoleh model diskrit eko-epidemiologi sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 S(n + 1) &= S(n) + h [rS(n)(1 - (S(n) + I(n))/K) - \beta S(n)I(n) - aS(n)Y(n)] \\
 I(n + 1) &= I(n) + h [\beta S(n)I(n) - bI(n)Y(n) - \alpha I(n)] \\
 Y(n + 1) &= Y(n) + h [cS(n)Y(n) + dI(n)Y(n) - \delta Y(n)]
 \end{aligned} \tag{2}$$

Dimana $S(n)$ merupakan kepadatan populasi *prey* rentan, $I(n)$ merupakan kepadatan populasi *prey* terinfeksi, $Y(n)$ merupakan kepadatan populasi *predator* dan parameter h merupakan ukuran langkah.

Titik Keseimbangan

Menurut definisi titik keseimbangan (Elaydi, 2007), suatu titik x^* dikatakan titik keseimbangan dari fungsi f jika memenuhi persamaan $f(x^*) = x^*$ dan x^* merupakan solusi konstan. Sehingga titik keseimbangan model diskrit eko-epidemiologi diperoleh dengan menyelesaikan persamaan berikut.

$$\begin{aligned}
 S &= S + h [rS(1 - (S + I)/K) - \beta SI - aSY] \\
 I &= I + h [\beta SI - bIY - \alpha I] \\
 Y &= Y + h [cSY + dIY - \delta Y]
 \end{aligned} \tag{3}$$

Dari ketiga persamaan tersebut diperoleh

$$S = 0 \text{ atau } rS \left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \beta SI - aSY = 0 \tag{4}$$

$$I = 0 \text{ atau } \beta SI - bIY - \alpha I = 0 \quad (5)$$

$$Y = 0 \text{ atau } cSY + dIY - \delta Y = 0 \quad (6)$$

Titik kesetimbangan persamaan (2) diperoleh dari kombinasi persamaan (4), (5), dan (6), yaitu:

1. $E_0 = (0,0,0)$. Titik kesetimbangan E_0 dapat disebut sebagai titik kepunahan *predator* dan *prey*.
2. $E_1 = (K, 0, 0)$. Titik kesetimbangan E_1 dapat disebut sebagai titik kepunahan *predator* dan *prey* terinfeksi.
3. $E_2 = \left(\frac{\delta}{c}, 0, \frac{r(Kc-\delta)}{Kac}\right)$ dengan $\delta < Kc$. Titik kesetimbangan E_2 dapat disebut sebagai titik kepunahan *prey* terinfeksi.
4. $E_3 = \left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{r(K\beta-\alpha)}{\beta(K\beta+r)}, 0\right)$ dengan $\alpha < K\beta$. Titik kesetimbangan E_3 dapat disebut sebagai titik kepunahan *predator*.
5. $E_4 = \left(x, \frac{\delta-cx}{d}, \frac{\beta x-\alpha}{b}\right)$ dengan $x = \frac{rb(\delta-Kd)+K(\beta\delta b-\alpha ad)}{rb(c-d)+K\beta(cb-ad)}$. Titik kesetimbangan E_4 dapat disebut sebagai titik keberhasilan hidup ketiga populasi atau titik ko-eksistensi dengan syarat $x \geq 0$ dengan $\delta > Kd, b\beta\delta > ad, c > d, bcd > abd$.

Analisis Kestabilan

Untuk mempelajari dinamika model disekitar E_0, E_1, E_2, E_3 , dan E_4 terlebih dahulu dicari persamaan linierisasi dari persamaan (2). Untuk melinierkan suatu persamaan maka dibuatlah matriks jacobian (J_E) sebagaimana pada Munandar (2017) berikut ini.

$$J_E = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dengan $a_{11} = 1 + hr - \frac{2hr}{K} S - \frac{hr}{K} I - h\beta I - haY$, $a_{12} = -\frac{hrs}{K} - h\beta$, $a_{13} = -haS$, $a_{21} = h\beta I$, $a_{22} = 1 + h\beta S - hbY - h\alpha$, $a_{23} = -hbI$, $a_{31} = hcY$, $a_{32} = hdY$, $a_{33} = 1 + hcS + hdI - h\delta$. Matriks Jacobian tersebut akan digunakan untuk menganalisis setiap titik kesetimbangan dengan mencari nilai eigen (λ) yang diperoleh dari menyelesaikan persamaan karakteristik $\det(\lambda I - J_E) = 0$. Analisis titik kesetimbangan dilakukan dengan cara mensubstitusi setiap nilai titik kesetimbangan ke dalam matriks Jacobian tersebut. Untuk menentukan kestabilan titik

kesetimbangan dari model diskrit, dapat digunakan definisi dan lemma berikut.

Definisi. Misalkan ada tiga nilai eigen yaitu λ_1, λ_2 dan λ_3 , dikatakan stabil jika :

1. $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$, dan $|\lambda_3| < 1$, maka titik kesetimbangan dari $E(x^*, y^*, z^*)$ disebut *silk* atau stabil lokal asimtotik.
2. $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| > 1$, dan $|\lambda_3| > 1$, maka titik kesetimbangan dari $E(x^*, y^*, z^*)$ disebut *source* dan tidak stabil.
3. $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| > 1$, dan $|\lambda_3| < 1$ atau $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| > 1$, dan $|\lambda_3| > 1$, maka titik kesetimbangan dari $E(x^*, y^*, z^*)$ disebut *saddle* dan tidak stabil.
4. $|\lambda_1| = 1, |\lambda_2| = 1$, dan $|\lambda_3| = 1$, maka titik kesetimbangan dari $E(x^*, y^*, z^*)$ disebut *non-hyperbolic*.

(Hu, dkk., 2017)

Lemma 1. Diberikan $F(\lambda) = \lambda^2 + B\lambda + C$, dimana B dan C konstanta. Jika $F(\lambda) > 0$ dan λ_1, λ_2 adalah dua akar dari $F(\lambda) = 0$, maka

1. $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| < 1$, jika dan hanya jika $F(-1) > 0$ dan $C < 1$;
2. $\lambda_1 = -1$ dan $|\lambda_2| \neq 1$ jika dan hanya jika $F(-1) = 0$ dan $B \neq 0, 2$;
3. $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| > 1$, jika dan hanya jika $F(-1) < 0$;
4. $|\lambda_1| > 1$ dan $|\lambda_2| > 1$, jika dan hanya jika $F(-1) > 0$ dan $C > 1$;
5. λ_1 dan λ_2 adalah akar konjuget kompleks dan $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ jika dan hanya jika $B^2 - 4AC < 0$ dan $C = 1$.

(Hu, dkk., 2014)

Lemma 2. Diberikan suatu persamaan $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, dimana $b, c, d \in R$. Dengan $A = b^2 - 3ac, B = bc - 9d, C = c^2 - 3bd$, dan $\Delta = B^2 - 4AC$. Maka

1. Persamaan memiliki 3 akar karakteristik yang berbeda jika dan hanya jika $\Delta \leq 0$.
2. Persamaan memiliki satu akar bilangan real dan sepasang akar konjuget kompleks jika dan hanya jika $\Delta > 0$. Dengan akar konjuget kompleks

$$\lambda = \frac{-2b + Y_1^{\frac{1}{3}} + Y_2^{\frac{1}{3}}}{6} \pm i \frac{\sqrt{3}(Y_1^{\frac{1}{3}} - Y_2^{\frac{1}{3}})}{6} \text{ dimana } Y_{12} = bA + \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2}.$$

(Hu, dkk., 2014)

Sekarang dibahas analisis kestabilan dari titik kesetimbangan E_0, E_1, E_2, E_3 , dan E_4 . Untuk titik kesetimbangan $E_0 = (0,0,0)$, matriks Jacobian dari persamaan (2) adalah

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} 1 + hr & 0 & 0 \\ 0 & 1 - h\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - h\delta \end{bmatrix}$$

Memiliki tiga nilai eigen dari J_{E_0} berikut.

$$\lambda_1 = 1 + hr, \lambda_2 = 1 - h\alpha, \lambda_3 = 1 - h\delta$$

Dari nilai eigen di atas, diperoleh teorema untuk titik kesetimbangan E_0 berikut.

Teorema 1. E_0 tidak stabil (*saddle*) karena nilai $|\lambda_1|$ akan selalu > 1 .

Selanjutnya, untuk titik kesetimbangan $E_1 = (K, 0, 0)$. Dengan mensubstitusi nilai E_1 ke dalam matriks Jacobian J_E diperoleh persamaan karakteristik berikut

$$\lambda_1 = 1 - hr, \lambda_2 = 1 + h(K\beta - \alpha), \lambda_3 = 1 + h(Kc - \delta)$$

Dari nilai eigen di atas, diperoleh teorema untuk titik kesetimbangan E_1 .

Teorema 2. E_1 memiliki kestabilan sebagai berikut:

1. Jika $h < \frac{2}{r}, h < \frac{2}{\alpha - K\beta}$ untuk $K\beta < \alpha$, dan $h < \frac{2}{\delta - Kc}$ untuk $Kc < \delta$, maka E_1 stabil lokal asimtotik (*silk*).
2. Jika $h < \frac{2}{r}$, dan $h > \frac{2}{\alpha - K\beta}$ dan $h > \frac{2}{\delta - Kc}$ atau $K\beta > \alpha$ dan $Kc > \delta$, maka E_1 tidak stabil.
3. Jika $h = \frac{2}{r}$, atau $h = \frac{2}{\alpha - K\beta}$, atau $K\beta = \alpha$, atau $h = \frac{2}{\delta - Kc}$, atau $Kc = \delta$, maka E_1 *non-hyperbolic*.

Selanjutnya, untuk titik kesetimbangan $E_2 = (\frac{\delta}{c}, 0, \frac{r(Kc - \delta)}{Kac})$. Dengan mensubstitusi nilai E_2 ke dalam matriks Jacobian J_E diperoleh persamaan karakteristik berikut

$$F(\lambda) = (\lambda - a_{22})(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0$$

Dengan $p = -(1 - hr - \frac{2hr\delta}{Kc} - \frac{hr(Kc - \delta)}{Kc} + 1)$ dan $q = (1 - hr - \frac{2hr\delta}{Kc} - \frac{hr(Kc - \delta)}{Kc}) - (-\frac{ha\delta}{c})(\frac{hr(Kc - \delta)}{Ka})$. Dari $F(\lambda)$ diperoleh satu nilai eigen $\lambda_1 = (1 + \frac{h\beta\delta}{c} - \frac{hrb(Kc - \delta)}{Kac})$

1. Jika $h < \frac{2Kac}{Ka(c\alpha - \beta\delta) + br(Kc - \delta)}$ dengan $\beta\delta < c\alpha$ dan $\delta < Kc$, maka $0 < \lambda_1 < 1$.
2. Jika $h > \frac{2Kac}{Ka(c\alpha - \beta\delta) + br(Kc - \delta)}$ dengan $\beta\delta < c\alpha$ dan $\delta < Kc$, maka $\lambda_1 > 1$.

3. Jika $h = \frac{2Kac}{Ka(c\alpha - \beta\delta) + br(Kc - \delta)}$ dengan $\beta\delta < c\alpha$ dan $\delta < Kc$, maka $\lambda_1 = 1$.

Selanjutnya untuk $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, dapat dicari berdasarkan Lemma 1. Sehingga diperoleh teorema untuk titik kesetimbangan E_2 .

Teorema 3. E_2 memiliki kestabilan sebagai berikut.

1. $0 < \delta < Kc, \beta\delta < c\alpha$. E_2 stabil lokal asimtotik (*silk*) jika
 - a. $h < \frac{2Kac}{Ka(c\alpha - \beta\delta) + br(Kc - \delta)}$, dan
 - b. $(2hr\delta + h^2 r\delta^2)/(4 + h^2 r\delta) < Kc < \delta + \frac{1}{h}$ atau jika $Kc < \frac{2}{h}$ dan $Kc < \delta + \frac{1}{h}$ maka $0 < \delta_1 < \delta_2$.
2. $0 < \delta < Kc, \beta\delta < c\alpha$. E_2 tidak stabil jika
 - a. $h > \frac{2Kac}{Ka(c\alpha - \beta\delta) + br(Kc - \delta)}$, atau $Kc < \frac{\delta(Ka\beta + br)}{a\alpha + br}$, dan
 - b. $Kc > \frac{2hr\delta + h^2 r\delta^2}{4 + h^2 r\delta}$ dan $Kc > \delta + \frac{1}{h}$
3. $0 < \delta < Kc, \beta\delta < c\alpha$. E_2 non-hyperbolic jika
 - a. $h = \frac{2Kac}{Ka(c\alpha - \beta\delta) + br(Kc - \delta)}$, atau $Kc = \frac{\delta(Ka\beta + br)}{a\alpha + br}$, dan
 - b. $Kc = \frac{2hr\delta + h^2 r\delta^2}{4 + h^2 r\delta}$ atau jika $Kc < \frac{2}{h}$ dan $Kc \neq \frac{hr\delta}{2}, \frac{hr\delta}{4}$ maka $0 < \delta_1 < \delta_2$.

Selanjutnya, untuk titik kesetimbangan $E_3 = \left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{r(K\beta - \alpha)}{\beta(K\beta + r)}, 0\right)$ dengan $c_1 = \frac{c\alpha}{\beta} +$

$\frac{rKd}{K\beta + r}$ dan $c_2 = \frac{rda}{\beta(K\beta + r)} + \delta$. Dengan mensubstitusi nilai E_3 ke dalam matriks Ja-

cobian J_E diperoleh persamaan karakteristik berikut

$$F(\lambda) = \left(\lambda - (1 + h(c_1 - c_2))\right)(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0$$

Dengan $p = -\left(2 - \frac{hr\alpha}{K\beta}\right)$ dan $q = 1 + \frac{h^2 r(K\beta - \alpha) - hr\alpha}{K\beta}$. Dari $F(\lambda)$ diperoleh satu nilai eigen $\lambda_1 = 1 + h(c_1 - c_2)$ untuk $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, dapat dicari berdasarkan Lemma 1. Sehingga diperoleh teorema untuk titik kesetimbangan E_3 berikut.

Teorema 4. Kestabilan E_3 adalah sebagai berikut.

1. $0 < c_1 < c_2$. E_3 stabil lokal asimtotik (*silk*) jika

$h < \frac{2}{c_2 - c_1}$, dan $\frac{h^2 r \alpha^2 + 2 h r \alpha}{4 + h^2 r \alpha} < K \beta < \alpha + \frac{1}{h}$ atau jika $K \beta < \frac{2}{h}$ maka

$0 < \alpha_1 < \alpha_2$ dan $K \beta < \alpha + \frac{1}{h}$.

2. E_3 tidak stabil jika $h > \frac{2}{c_2 - c_1}$ atau $c_2 < c_1$, dan $K \beta > (h^2 r \alpha^2 + 2 h r \alpha) / (4 + h^2 r \alpha)$ dan $K \beta > \alpha + \frac{1}{h}$.

3. E_3 disebut *non-hyperbolic* jika

$h = \frac{2}{c_2 - c_1}$ atau $c_1 = c_2$, atau $K \beta = \frac{h^2 r \alpha^2 + 2 h r \alpha}{4 + h^2 r \alpha}$ atau $0 < \alpha_1 < \alpha_2$ maka

$K \beta < \frac{2}{h}$, $K \beta \neq \frac{h r \alpha}{2}, \frac{h r \alpha}{4}$.

Selanjutnya, untuk titik kesetimbangan $E_4 = (x, \frac{\delta - cx}{d}, \frac{\beta x - \alpha}{b})$, matriks Jacobian dari persamaan (2) adalah

$$J_{E_4} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{hrx}{K} & -\frac{hrx}{K} - h\beta x & -hax \\ h\beta \left(\frac{\delta - cx}{d}\right) & 1 & -hb \left(\frac{\delta - cx}{d}\right) \\ hc \left(\frac{\beta x - \alpha}{b}\right) & hd \left(\frac{\beta x - \alpha}{b}\right) & 1 \end{bmatrix}$$

Diperoleh persamaan karakteristik dari J_{E_4} sebagai berikut

$$F(\lambda) = \lambda^3 + b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3 = 0$$

Dengan $b_1 = \frac{hrx}{K} - 3, b_2 = 3 - \frac{2hrx}{K} + k_1 + k_2, b_3 = \frac{hrx}{K} - k_1 + k_2 + k_3 - k_4 -$

1. $k_1 = \frac{(h^2 r \beta x + h^2 K \beta^2 x) l}{K d}, k_2 = \frac{h^2 a c x(k)}{b}, k_3 = \frac{((h^3 K a d \beta x + h^3 K b c x + h^2 K b d)(-l)) k}{K b d}, k_4 =$

$\frac{((h^3 r b d x + h^3 K b c \beta x + h^2 K b d)(-l)) (k)}{K b d}$. Dari $F(\lambda)$ di atas, diperoleh $F'(\lambda) = 3\lambda^2 +$

$b_1 \lambda + b_2 = 0$ memiliki 2 akar persamaan $\lambda_{1,2}^* = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 3b_2}}{3}$ dengan $\lambda_{1,2}^* > 0$

jika $h > \frac{3K}{r} x$. Sehingga berdasarkan Lemma 2, kestabilan titik E_4 dijelaskan dalam Teorema berikut.

Teorema 5. $\alpha < \beta x, cx < \delta, k_4 < 2k_2 + k_3$. E_4 memiliki kondisi sebagai berikut.

1. E_4 stabil lokal asimtotik (*silk*) jika $\Delta \leq 0, F(-1) < 0$, dan akar $\lambda_{1,2}^*$ dari $F'(\lambda) = 0$ memenuhi $-1 < \lambda_{1,2}^* < 1$.

2. E_4 non-hyperbolic jika $\Delta \leq 0$ dan $F(-1) = 0$,
3. E_4 tidak stabil jika tidak memenuhi Teorema 5.1 dan Teorema 5.2

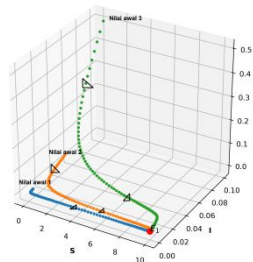
Simulasi Numerik

Simulasi numerik persamaan (2) dilakukan dengan menggunakan metode Euler dengan bantuan software matematika. Nilai awal yang digunakan untuk simulasi pada setiap titik kesetimbangan yaitu terdapat pada tabel 1.

Tabel 1. Nilai Awal untuk Simulasi E

	Nilai awal 1	Nilai awal 2	Nilai awal 3
S	0,005	0,07	0,4
I	0,006	0,05	0,1
Y	0,004	0,04	0,5

Untuk mengilustrasikan kestabilan titik kesetimbangan E_1 digunakan parameter $r = 5, K = 10, \alpha = 2,3, \beta = 0,2, \delta = 3,5, a = 0,8, b = 0,9, c = 0,3, \text{ dan } d = 0,25$. Ukuran langkah yang digunakan adalah $h = 0,02$. Berdasarkan parameter tersebut diperoleh nilai $hr < 2, h(\alpha - K\beta) < 2, \text{ dan } h(\delta - Kc)$ maka syarat kestabilan E_1 terpenuhi.

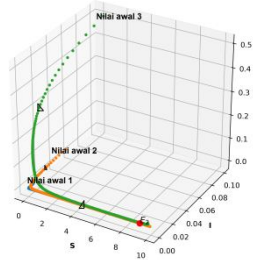


Gambar 1. Simulasi model untuk kestabilan E_1

Berdasarkan Gambar 1 terlihat bahwa E_1 stabil. Dengan diberikan tiga nilai awal, semua grafik solusi menuju titik kesetimbangan $E_1(10,0,0)$. Hal ini menunjukkan bahwa dalam jangka panjang predator dan prey terinfeksi akan punah dan ekosistem hanya akan dihuni oleh prey rentan.

Selanjutnya untuk mengilustrasikan kestabilan titik kesetimbangan E_2 digunakan parameter $r = 1, K = 10, \alpha = 5, \beta = 0,5, \delta = 1,5, a = 3, b = 3,5, c = 0,2, \text{ dan } d = 1$. Ukuran langkah yang digunakan adalah $h = 0,02$. Berdasarkan parameter tersebut diperoleh nilai $h < \frac{2Kac}{Ka(\alpha - \beta\delta) + br(Kc - \delta)}$ dan $\frac{2hr\delta + h^2r\delta^2}{4 + h^2r\delta} < Kc <$

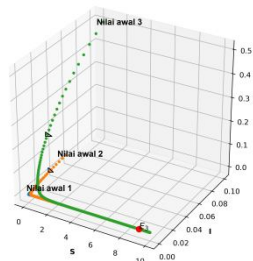
$\delta + \frac{1}{h}$ maka syarat kestabilan E_2 terpenuhi.



Gambar 2. Simulasi model untuk kestabilan E_2

Berdasarkan Gambar 2 terlihat bahwa E_2 stabil. Dengan diberikan tiga nilai awal, semua grafik solusi menuju titik kesetimbangan $E_2(7,5,0,0,083)$. Hal ini menunjukkan bahwa dalam jangka panjang *prey* terinfeksi akan punah dan ekosistem hanya akan dihuni oleh *prey* rentan dan *predator*.

Selanjutnya untuk mengilustrasikan kestabilan titik kesetimbangan E_3 digunakan parameter $r = 1, K = 10, \alpha = 5, \beta = 0,56, \delta = 3, a = 1, b = 1, c = 0,1$ dan $d = 3$. Ukuran langkah yang digunakan adalah $h = 0,02$. Berdasarkan parameter tersebut diperoleh nilai $h < \frac{2}{c_2 - c_1}$ dan $\frac{h^2 r \alpha^2 + 2 h r \alpha}{4 + h^2 r \alpha} < K \beta < \alpha + \frac{1}{h}$ maka syarat kestabilan E_3 terpenuhi.

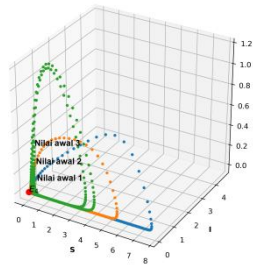


Gambar 3. Simulasi model untuk kestabilan E_3

Berdasarkan Gambar 3 terlihat bahwa E_3 stabil. Dengan diberikan tiga nilai awal, semua grafik solusi menuju titik kesetimbangan $E_3(5,0,45,0)$. Hal ini menunjukkan bahwa dalam jangka panjang *predator* akan punah dan ekosistem hanya akan dihuni oleh *prey* rentan dan *prey* terinfeksi.

Selanjutnya untuk mengilustrasikan kestabilan titik kesetimbangan E_4 digu-

nakan parameter $r = 1, K = 10, \alpha = 7, \beta = 5, \delta = 7, a = 3, b = 1, c = 5,5$ dan $d = 5$. Ukuran langkah yang digunakan adalah $h = 0,02$. Berdasarkan parameter tersebut diperoleh nilai $\Delta \leq 0$, yaitu 0 dan $F(1) < 0$, yaitu -8 maka syarat kestabilan E_4 terpenuhi.



Gambar 4. Simulasi model untuk kestabilan E_4

Berdasarkan Gambar 4 terlihat bahwa E_4 stabil. Dengan diberikan tiga nilai awal, semua grafik solusi menuju titik kesetimbangan $E_4(1,414,0,127,0,069)$. Hal ini menunjukkan bahwa dalam jangka panjang ekosistem akan dihuni oleh *prey* rentan, *prey* terinfeksi, dan *predator*.

Kesimpulan

Model diskrit eko-epidemiologi diperoleh dengan melakukan diskritisasi model-menggunakan pendekatan metode Euler. Hasil analisis menunjukkan bahwa model diskrit eko-epidemiologi terhadap kelima titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan E_0 , titik kesetimbangan kepunahan *prey* terinfeksi dan *predator* E_1 , titik kesetimbangan kepunahan *prey* terinfeksi E_2 , titik kesetimbangan kepunahan *predator* E_3 , dan titik kesetimbangan interior E_4 . Titik kesetimbangan E_0 tidak pernah stabil, sedangkan sifat kestabilan titik kesetimbangan E_1, E_2, E_3 dan E_4 ditentukan oleh suatu syarat dan kondisi tertentu.

Ucapan Terimakasih

Ucapan terimakasih ditujukan kepada Bapak Hasan Panigoro, M. Si dan Ibu Emlil Rahmi, M. Si yang telah banyak membantu dalam penelitian ini.

Daftar Pustaka

- Arsyad, S. H., Resmawan, R., & Achmad, N. (2020). Analisis Model Predator-Prey Leslie-Gower dengan Pemberian Racun Pada Predator. *Jurnal Riset Dan Aplikasi Matematika*, 4(1), 1–16.
- Brauer, F. & Castillo-Chavez, C. (2012). *Mathematical models in population biology and epidemiology*. Springer, New York, second edition.
- Elaydi, S. N. (2007). *Discrete Chaos: With Applications in Science and Engineering*, volume 2007. Chapman and Hall/CRC, San Antonio, Texas, 2nd edition.
- Fitria, V. A., & Afiyah, N. (2017). Analisis Dinamik Skema Euler untuk Model *Predator-Prey* dengan efek Allee Kuadrat. *Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika* Vol. 2 No. 1 Maret 2017. DOI:10.26594/jmpm.v2i1.774.
- Hasan, N., Resmawan, R., & Rahmi, E. (2020). Analisis Kestabilan Model Eko-Epidemiologi dengan Pemanenan Konstan pada Predator. *Jurnal Matematika, Statistika Dan Komputasi*, 16(2), 121–142.
- Hu, Z., Z. Teng, C. Jia, L. Zhang., & X. Chen. (2014). Complex dynamical behaviors in a discrete eco-epidemiological model with disease in prey. *Advances in Difference Equation*, 2014:265. <http://doi.org/10.1186/1687-1847-2014-265>.
- Hu, Z., Z. Teng, T. Zhan, Q. Zhou, & X. Chen. (2017). Globally asymptotically stable analysis in a discrete time eco-epidemiological system. *Chaos, Solitons and Fractals*. 99:20-31. doi:10.1016/j.chaos.2017.03.042.
- Maisaroh, S., Resmawan, R., & Rahmi, E. (2020). Analisis Kestabilan Model Predator-Prey dengan Infeksi Penyakit pada Prey dan Pemanenan Proporsional pada Predator. *Jambura J. Biomath*, 1(1), 8–15.
- Mokodompit, R., Nurwan, N., & Rahmi, E. (2020). Bifurkasi Periode Ganda dan Neimark-Sacker pada Model Diskret Leslie-Gower dengan Fungsi Respon Ratio-Dependent. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, 17(1), 19.
- Munandar, A. (2017). Analisis Konsistensi dan Kestabilan Model Dinamik Diskret pada Masalah Predator-Prey dengan Fungsi Respon Ratio Dependent dan Pemanenan pada Predator. Skripsi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim. Malang.
- Murray, J.D. (2002). *Mathematical Biology I: An Introduction*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer New York, New York, NY, 3rd edition.
- Purnomo, A. S., Darti, I., & Suryanto, A. (2017). Dynamics of ecoepidemiological

- model with harvesting. AIP Conference Proceedings, 1913 (2017).
- Raj, M. R. S., A. G. M. Selvam. & R. Janagaraj. (2013). Stability in a Discrete Prey-Predator Model. International Journal of Latest Reserch in Science and Technology volume 2, Issue 1:Page No.482-485, January-February (2013).
- Siddik, A. M. A. (2017). Analisis Kestabilan Model Mangsa-Pemangsa dengan Fungsi Respon Holling Tipe III dan Penyakit pada Pemangsa Super. Tesis. Universitas Hasanudin. Makassar.
- Xiao, Y. & Chen, L. (2002). A ratio-dependent predator-prey model with disease in the prey. Appl. Math. Comput. 131,397-414.