

SIMULASI NUMERIK PERPINDAHAN PANAS BATANG BAJA MENGUNAKAN SKEMA BEDA HINGGA KOMPAK PADA METODE CRANK-NICOLSON

Rofila El Maghfiroh¹, Rif'atul Khusniah², Moch. Sholeh³, Marjono⁴, Dwi Ratnaningsih⁵

^{1,2,3,4,5}Jurusan Teknik Sipil, Politeknik Negeri Malang

rofila.elma@gmail.com

RIWAYAT ARTIKEL

Diterima (8-11-2019)

Revisi (4-12-2019)

Diterbitkan (30-12-2019)

ABSTRAK

Perpindahan panas sangat penting untuk diperhatikan. Solusi numerik dari persamaan konduksi panas yang diterapkan pada batang baja 1-dimensi dilakukan untuk mengamati perpindahan panas pada baja. Skema beda hingga kompak pada metode Crank-Nicolson memberikan solusi numerik persamaan konduksi panas pada batang baja 1-dimensi dengan tingkat akurasi yang sangat tinggi.

Kata kunci: simulasi numerik, perpindahan panas, skema beda hingga kompak, metode Crank-Nicolson

ABSTRACT

Heat transfer very important to be observed. Numerical solutions of heat conduction equations applied to 1-dimensional steel bars are performed to observe heat transfer of steel. Compact finite difference schemes in Crank-Nicolson method provide numerical solutions of heat conduction equations on 1-dimensional steel bars a very high degree accuracy.

Key words: numerical simulations, heat transfer, compact finite difference schemes, Crank-Nicolson method

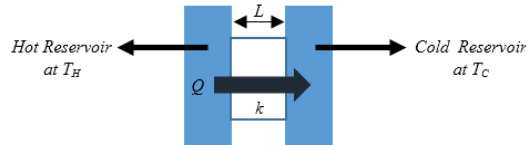
1. Pendahuluan

Baja merupakan perpaduan antara besi dan karbon. Bila besi dipadu dengan karbon disebut baja (*steel*), akan tetapi bila besi dipadu dengan logam lain disebut baja paduan (*alloy steel*) (Nurlina, 2011). Logam dan paduan logam memiliki banyak manfaat dibidang teknik. Besi dan paduannya (terutama baja) memberikan sekitar 90% dari produksi logam di dunia, karena kombinasi keduanya sangat kuat dan tangguh serta memiliki *ductility* yang baik dengan biaya relatif rendah (Smith and Hashemi, 2006). Baja sangat sering digunakan dalam bidang konstruksi. Salah satu proses pengolahan baja yang sering ditemui adalah proses perlakuan panas pada baja. Perlakuan panas pada baja mengakibatkan terjadinya perpindahan panas. Perpindahan panas dapat diilustrasikan sebagai berikut.

Jika salah satu ujung bahan menyentuh sumber panas, maka pada ujung yang lain akan terasa semakin panas, walaupun tidak ada kontak langsung dengan sumber panas. Panas mencapai ujung yang lebih dingin dengan konduksi melalui bahan. Pada tingkat atom, atom pada daerah panas memiliki rata-rata energi kinetik lebih besar daripada daerah dingin. Atom-atom pada daerah panas menabrak atom terdekat, memberikan sebagian

energinya. Atom terdekat kembali menabrak atom terdekat lainnya, dan begitu seterusnya di sepanjang bahan. Atom-atom itu sendiri tidak bergerak dari daerahnya, tetapi energinya berpindah. Perpindahan panas hanya terjadi diantara daerah yang berbeda suhunya dan arah aliran panas selalu terjadi dari suhu lebih tinggi ke lebih rendah (Young and Freedman, 2002).

Konduksi panas dapat diilustrasikan sebagai berikut (Halliday et. al., 1997).



Gambar 1. Ilustrasi perpindahan panas konduksi

Sebatang bahan konduktor dengan luas penampang A dan panjang L . Ujung kiri dari batang dijaga pada suhu T_H dan ujung kanan pada suhu T_C yang lebih rendah. Panas mengalir dari kiri ke kanan. Permukaan batang dilapisi oleh isolator ideal, sehingga tidak ada perpindahan panas pada permukaan batang. Ketika kuantitas dQ dipindahkan melalui batang dalam waktu dt , laju aliran panas adalah $\frac{dQ}{dt}$. Laju ini sebagai arus panas (*heat current*), dilambangkan dengan H , dengan demikian $H = \frac{dQ}{dt}$. Percobaan menunjukkan bahwa arus panas berbanding lurus dengan luas penampang A dan perbedaan suhu ($T_H - T_C$), tetapi berbanding terbalik dengan panjang batang L . Sedemikian sehingga, dapat dituliskan arus panas konduksi adalah $H = \frac{dQ}{dt} = kA \frac{T_H - T_C}{L}$, dengan k adalah konstanta konduktivitas termal. Kuantitas $\frac{T_H - T_C}{L}$ adalah perbedaan suhu per satuan panjang disebut sebagai besar dari gradien suhu (Young and Freedman, 2002).

Berikut ini adalah nilai konstanta konduktivitas termal suatu bahan (Halliday and Resnick, 1978).

Tabel 1. Konstanta konduktivitas termal

BAHAN	kcal/s.m.°C
Aluminium	$4,9 \times 10^{-2}$
Brass	$2,6 \times 10^{-2}$
Copper	$9,2 \times 10^{-2}$
Lead	$8,3 \times 10^{-3}$
Silver	$9,9 \times 10^{-2}$
Steel	$1,1 \times 10^{-2}$

Beberapa penelitian terkait tentang perpindahan panas adalah solusi penyebaran panas pada batang konduktor menggunakan metode Crank-Nicolson dengan syarat batas campuran memiliki keakuratan yang sama dengan solusi analitiknya (Noviantri, 2012). Selain itu, solusi numerik skema pendekatan Crank-Nicolson dengan skema beda hingga kompak cukup akurat, artinya selisih antara solusi numerik dan solusi analitik cukup kecil (Maghfiroh dan Zaman, 2016).

Pada penelitian ini, akan disimulasikan solusi numerik dari persamaan konduksi panas yang diaplikasikan pada batang baja 1-dimensi di setiap level waktu. Hal ini dilakukan untuk mengetahui perilaku perpindahan panas pada batang baja 1-dimensi. Skema yang akan digunakan adalah skema pendekatan beda hingga kompak yang diterapkan pada metode Crank-Nicolson. Hal ini dikarenakan pada metode ini pendekatan turunan tingkat satu terhadap variabel waktu menggunakan skema beda hingga pusat dan pendekatan turunan tingkat dua terhadap variabel ruang menggunakan skema beda hingga kompak. Oleh karena itu, diharapkan solusi numerik memberikan hasil yang mendekati kondisi nyata.

2. Metode Penelitian

Persamaan konduksi panas dapat diaplikasikan untuk menganalisis perpindahan panas secara konduksi, salah satu contohnya adalah untuk mengetahui penyebaran panas pada baja. Pada penelitian ini, diasumsikan terdapat sebuah batang baja homogen, sehingga konstanta konduktivitas termalnya sama di setiap titik. Batang baja tersebut memiliki panjang L dan luas penampang melintang yang sama di setiap titik. Panas pada batang hanya keluar dari ujung batang, karena kondisi pada sekeliling permukaan batang tersebut diisolasi, sehingga tidak ada panas yang keluar melalui permukaan batang (Maghfiroh dan Zaman, 2016).

Selain itu, pada penelitian ini diasumsikan suhu pada ujung kanan dan kiri batang diketahui nilainya, sehingga syarat batas yang digunakan adalah syarat batas Dirichlet. Syarat awal yang digunakan masih dalam bentuk persamaan matematika yaitu dalam fungsi sinus. Oleh karena itu, permasalahan di atas dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan konduksi panas 1-dimensi dengan syarat awal dan syarat batas sebagai berikut.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} ; 0 < x < L , t < 0 , \quad (2.1)$$

dengan syarat awal

$$u(x,0) = f(x) ; 0 < x < L , \quad (2.2)$$

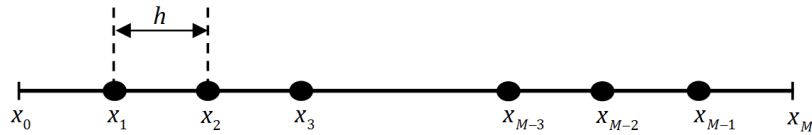
dan syarat batas Dirichlet

$$u(0,t) = u_A(t) , u(L,t) = u_B(t) ; t > 0 , \quad (2.3)$$

Dengan $u(x,t)$ adalah suhu di titik x saat waktu t dan k adalah konstanta konduktivitas

termal.

Solusi numerik dari persamaan 2.1 ditentukan dengan membentuk *grid point* pada interval $[0, L]$. Interval tersebut dipartisi menjadi M sub interval, dengan panjang sub interval h sebagai berikut.



Gambar 2. Letak *grid point*

Berdasarkan Gambar 2, diperoleh panjang sub interval yaitu $h = \frac{L}{M}$.

Solusi numerik persamaan 2.1 diperoleh dengan menggunakan metode Crank-Nicolson. Turunan tingkat satu terhadap variabel waktu akan didekati dengan skema beda hingga pusat, sedangkan turunan tingkat dua terhadap variabel ruang akan didekati dengan skema beda hingga kompak.

Turunan tingkat satu terhadap variabel waktu pada persamaan 2.1 akan didekati dengan skema beda hingga pusat berorde dua sebagai berikut.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t_{n+\frac{1}{2}}} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t^2) \tag{2.4}$$

(Humi and Miller, 1992)

Turunan tingkat dua terhadap variabel ruang pada persamaan 2.1 akan didekati dengan skema beda hingga kompak. Pendekatan nilai u_i'' ditentukan dengan asumsi menggunakan nilai u_{i+1}'' dan u_{i-1}'' selain nilai u_i , u_{i+1} dan u_{i-1} . Skema pendekatan dari u_i'' adalah sebagai berikut

$$a_0 u_i'' + a_1 u_i + a_2 u_{i+1} + a_3 u_{i-1} + a_4 u_{i+1}'' + a_5 u_{i-1}'' = O(h^p)$$

Koefisien a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , dan a_5 harus ditentukan untuk memaksimalkan orde skema beda hingga yang disimbolkan dengan $O(h^p)$. Skema pendekatan tersebut dikatakan kompak karena memerlukan informasi dari titik di persekitaran i , yaitu titik $i + 1$ dan $i - 1$.

Oleh karena itu, didapatkan skema beda hingga kompak berorde empat sebagai berikut.

$$\frac{1}{12} u_{i-1}'' + \frac{10}{12} u_i'' + \frac{1}{12} u_{i+1}'' = -\frac{1}{h^2} (-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) + O(h^4) \tag{2.5}$$

Skema pada persamaan 2.5 mempunyai tingkat akurasi tinggi, karena skema tersebut berorde empat. Selain itu, persamaan tersebut juga dapat dikatakan kompak, karena memerlukan informasi dari *grid point* di sekitar i , yaitu *grid point* $i-1$ dan $i+1$. Skema pada

persamaan 2.5 disebut skema beda hingga kompak (Maghfiroh dan Zaman,2016). Skema beda hingga kompak bersifat global, karena untuk mendapatkan nilai turunan fungsi di suatu *grid point*, diperlukan nilai fungsi dan nilai turunan fungsi di semua *grid point* (Moin, 2010).

Pada metode Crank-Nicolson, untuk persamaan 2.1, nilai pendekatan u_i menggunakan skema beda hingga pusat, sedangkan nilai pendekatan u_{xx} menggunakan nilai rata-rata dari u_{xx} di *grid point* x_i saat t_n dan t_{n+1} (Humi and Miller, 1992). Oleh karena itu, diperoleh skema pendekatan Crank-Nicolson untuk persamaan 2.1 adalah sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
 w^{(n+1)} &= (I + rA^{-1}B)^{-1} (I - rA^{-1}B)w^{(n)} \\
 &\quad - (I + rA^{-1}B)^{-1} rA^{-1}D(b^{(n)} + b^{(n+1)}) \\
 &\quad - (I + rA^{-1}B)^{-1} A^{-1}C(b^{(n+1)} - b^{(n)})
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

dengan

$$A = \begin{pmatrix} \frac{10}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{10}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & 0 \\ 0 & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{12} & \frac{10}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{12} & \frac{10}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$r = \frac{k\Delta t}{2h^2}$$

$$w^{(n)} \approx (u_1^n \quad u_2^n \quad \dots \quad u_{M-1}^n \quad u_M^n)^T$$

$$b^{(n)} = (u_A(t_n) \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad u_B(t_n))^T$$

skema pada persamaan 2.6 digunakan untuk menentukan solusi numerik dari persamaan 2.1 yaitu persamaan konduksi panas 1-dimensi (Maghfiroh dan Zaman, 2016).

3. Hasil dan Pembahasan

Pada pembahasan akan ditentukan simulasi numerik dari solusi persamaan konduksi panas pada batang baja 1-dimensi dengan asumsi tanpa sumber panas berikut ini. Perlu diperhatikan bahwa konstanta konduktivitas termal baja adalah $k = 1,1 \times 10^{-2}$.

$$u_t(x, t) = k u_{xx}(x, t) ; 0 < x < 1 , t > 0 \tag{3.1}$$

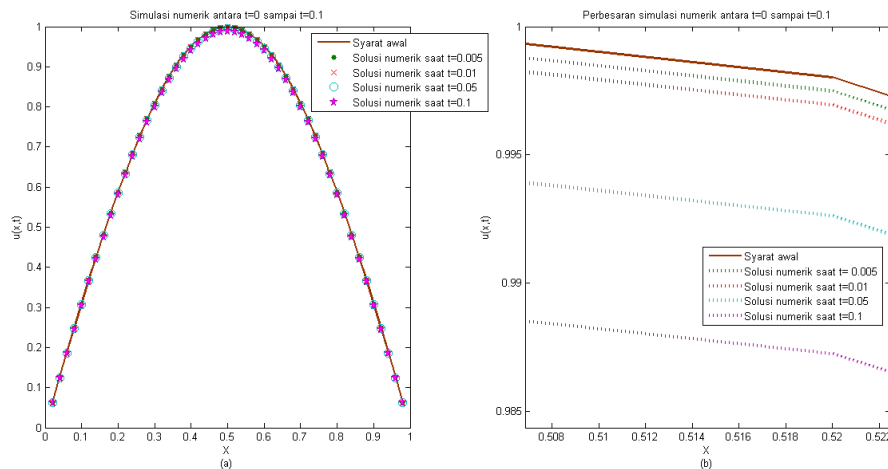
dengan syarat awal

$$u(x, 0) = \sin(\pi x) ; 0 < x < 1 \tag{3.2}$$

dan syarat batas

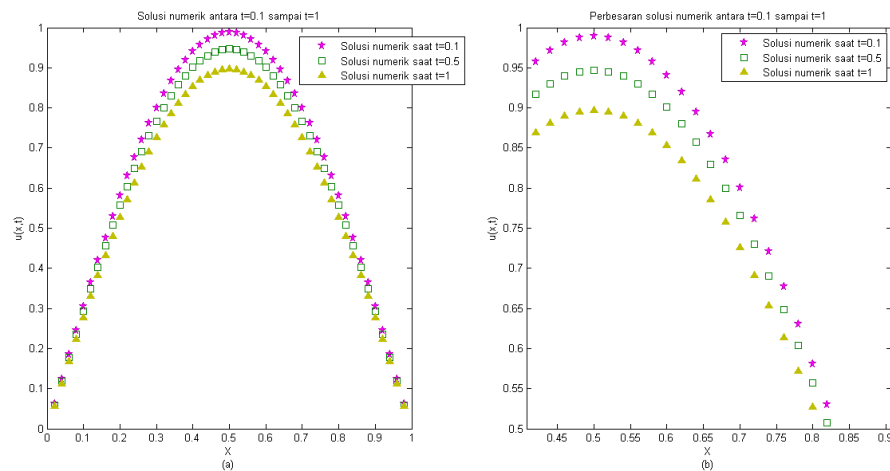
$$u(0, t) = u(1, t) = 0 ; t > 0 \tag{3.3}$$

Berikut ini adalah perilaku solusi numerik persamaan 3.1 yang dimulai dari syarat awal sampai level waktu tertentu.



Gambar 3. Perilaku solusi numerik dari syarat awal sampai $t = 0,1$

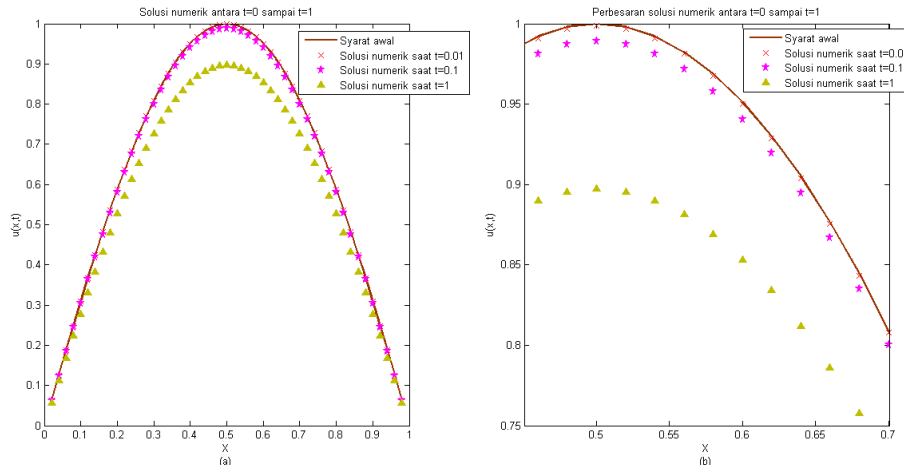
Gambar 3 (a) menunjukkan perilaku solusi numerik persamaan 3.1 yang dimulai dari syarat awal sampai $t = 0,1$. Perbedaan solusi numerik di tiap level waktu cukup kecil, sehingga tidak terlihat jelas perilakunya. Gambar 3 (b) adalah perbesaran dari Gambar 3 (a), tetapi solusi numerik persamaan 3.1 yang diamati hanya mencakup di titik $x = 0,508$ sampai $x = 0,522$. Berdasarkan Gambar 3 (b) dapat dikatakan perilaku solusi numerik persamaan 3.1 semakin mengecil, meskipun di $t = 0,005$ sampai $t = 0,01$ terjadi penurunan yang sangat kecil, tetapi saat $t = 0,05$ dan $t = 0,1$ penurunan solusi numerik persamaan 3.1 cukup besar. Penurunan solusi numerik dikarenakan batang baja 1-dimensi melepaskan panas. Oleh karena itu dapat dikatakan ketika solusi numerik semakin mengecil jika dibandingkan dengan syarat awal, maka sistem melepaskan panas dan menyesuaikan dengankondisilingkungannya. Selanjutnya, perilaku solusinumernik persamaan 3.1 pada $t = 0,1$ sampai $t = 1$ ditunjukkan dalam gambar berikut ini.



Gambar 4. Perilaku solusi numerik dari $t = 0,1$ sampai $t = 1$

Berbeda dengan Gambar 3 (a), pada Gambar 4 (a) perilaku solusi numerik persamaan 3.1 terlihat cukup jelas, karena perbedaannya cukup jauh. Gambar 4 (b) menunjukkan perbesaran dari Gambar 4 (a), di titik $x = 0,45$ sampai $x = 0,9$. Sama seperti pada gambar sebelumnya, pada Gambar 4 menunjukkan solusi numerik persamaan 3.1 tetap semakin mengecil dengan bertambahnya level waktu. Sedemikian sehingga, dapat dikatakan bahwa batang baja 1-dimensi masih tetap melepaskan panas hingga $t = 1$.

Gambar berikut menunjukkan perilaku dari solusi numerik persamaan 3.1 pada $t = 0$ (syarat awal) sampai $t = 1$.



Gambar 5. Perilaku solusi numerik mulai $t = 0$ sampai $t = 1$

Gambar 5 (a) menunjukkan perilaku solusi numerik persamaan 3.1 pada $t = 0$; $t = 0,01$; $t = 0,1$ dan $t = 1$. Pada dasarnya pada Gambar 5 hanya menggabungkan hasil dari Gambar 3 dan Gambar 4. Gambar 5 (b) adalah perbesaran dari Gambar 5 (a), tetapi solusi numerik persamaan 3.1 yang diamati hanya mencakup di titik $x = 0,5$ sampai $x = 0,7$. Berdasarkan Gambar 5 dapat dikatakan bahwa semakin bertambahnya level waktu penurunan solusi numerik persamaan 3.1 semakin besar. Jadi, dengan bertambahnya level waktu, batang baja 1-dimensi akan semakin melepaskan panas.

Berdasarkan gambar-gambar diatas, maka dapat dikatakan bahwa batang baja 1-dimensi melepaskan panas menyesuaikan dengan kondisi lingkungannya, karena tidak terdapat sumber panas. Bentuk solusi numerik persamaan 3.1, selain dipengaruhi oleh syarat awal yaitu fungsi sinus, juga dipengaruhi oleh syarat batas yang digunakan. Perlu diperhatikan bahwa syarat batas yang digunakan adalah syarat batas Dirichlet dimana pada ujung-ujungnya dipertahankan bernilai nol pada setiap level waktunya.

4. Kesimpulan

Skema beda hingga kompak pada metode Crank-Nicolson memberikan solusi numerik persamaan konduksi panas pada batang baja 1-dimensi dengan tingkat akurasi yang sangat tinggi. Pada setiap level waktu, solusi numerik persamaan konduksi panas pada batang baja 1-dimensi semakin mengecil dari syarat awal yang diberikan. Hal ini dapat dikatakan bahwa, dengan bertambahnya level waktu, batang baja 1-dimensi melepaskan panas menyesuaikan dengan kondisi lingkungannya.

Ucapan Terimakasih

Terima kasih disampaikan kepada Politeknik Negeri Malang yang telah mendanai keberlangsungan penelitian ini dalam Dana Penelitian DIPA Reguler Politeknik Negeri Malang.

Daftar Pustaka

- Halliday, D. and Resnick, R., 1978, *Physics Parts 1 and 2*, Third Edition, Combined edition, John Wiley & Sons, Inc. Canada.
- Halliday, D. et.al., 1997, *Fundamental of Physics*, Fifth Edition, John Wiley & Sons, Inc. Canada.
- Humi, M. and Miller, W.B., 1992, *Boundary Value Problems and Partial Differential Equations*, PWS-KENT Publishing Company, Boston.
- Maghfiroh, R.E. dan Zaman, M.B., 2016, 'Simulasi Numerik Perpindahan Panas Konduksi 1-Dimensi Dengan Syarat Batas Dirichlet Menggunakan Skema Beda Hingga Kompak', *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pembelajarannya*, Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Malang, pp. 1290-1297.
- Moin, P., 2010, *Fundamentals of Engineering Numerical Analysis*, Cambridge University Press, New York.
- Noviantri, V., 2012, Solusi Penyebaran Panas Pada Batang Konduktor Menggunakan Metode Crank-Nicolson, *Jurnal Mat.Stat*, Vol.12, No.2, pp.133-142.
- Nurlina, S., 2011, *Teknologi Bahan I*, Bargie Media, Malang.
- Smith, W.F. and Hashemi, J., 2006, *Foundations of Materials Science and Engineering, Fourth Edition*, New York.
- Young, H. D. and Freedman, R. A., 2002, *Sears and Zemansky, Fisika Universitas*, Edisi Kesepuluh, Jilid I, Erlangga, Jakarta.