INTERPOLASI POLINOMIAL LEGENDRE DENGAN METODE PENYELESAIAN POLINOM NEWTON DAN ALGORITMA NEVILLE

Hidayatullah, Rachmaniah M. Hariastuti

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas PGRI Banyuwangi
loveyouhidayat15@gmail.com, mirzarachmania@gmail.com

Abstrak

Polinomial Legendre merupakan salah satu jenis fungsi polinom yang dapat didefinisikan beserta sifat-sifatnya pada tingkat pertama sebagai fungsi khusus yaitu $P_r(x)$, dengan: $P_{r+1}(x) = \frac{(2r+1)xP_r(x)-rP_{r-1}(x)}{r+1}$, dengan kondisi awal $P_0(x) = 1$ dan $P_1(x) = x$. Penelitian ini dilakukan untuk mengidentifikasi penerapan metode penyelesaian polinom Newton dan algoritma Neville untuk menyelesaikan fungsi polinom Legendre.

Jenis penelitian yang digunakan adalah *Verificative Research*. Data yang digunakan adalah data sekunder, yaitu delapan fungsi Legendre yang pertama, yang diselesaikan dengan solusi analitik serta metode penyelesaian polinom Newton dan algoritma Neville. Hasil yang diperoleh dari kedua metode kemudian dibandingkan dengan hasil analitik untuk mendapatkan nilai *relative error*. Selanjutnya, dilakukan analisis besar nilai *relative error* yang muncul.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa penyelesaian polinomial Legendre dengan metode penyelesaian polinom Newton mempunyai rata-rata $\boldsymbol{\varepsilon_r}$ sebesar 0% dengan tidak ada $\boldsymbol{\varepsilon_r}$. Sedangkan penyelesaian dengan algoritma Neville mempunyai rata-rata $\boldsymbol{\varepsilon_r}$ sebesar 0,0000284767%. Artinya metode penyelesaian polinom Newton adalah metode yang lebih akurat digunakan untuk penyelesaian polinomoal Legendre dibandingkan dengan algoritma Neville.

Kata Kunci: Interpolasi, Polinomial Legendre, Metode Penyelesaian Polinom Newton, Algoritma Neville

1. PENDAHULUAN

Metode numerik merupakan cara atau teknik dimana masalah-masalah matematika diformulasikan sedemikian rupa sehingga dapat diselesaikan oleh pengoperasian aritmatika (Septiani, 2011). Secara umum formulasi yang digunakan dalam metode numerik adalah untuk menentukan nilai dari suatu fungsi yang telah tertentu. Penentuan yang dilakukan diantara dua atau lebih data yang telah diketahui dikenal sebagai interpolasi, sedangkan penentuan diluar data yang telah diketahui dikenal sebagai ekstrapolasi.

Secara khusus dalam penelitian ini akan dibahas tentang interpolasi. Interpolasi pada dasarnya adalah proses pencarian dan perhitungan nilai suatu fungsi yang grafiknya melewati sekumpulan titik yang diberikan (Sahid, 2005:197). Secara sederhana interpolasi dapat dinyatakan sebagai suatu teknik untuk mencari harga fungsi di suatu titik di antara dua titik yang harga fungsinya sudah diketahui atau cara penaksiran harga y pada saat x berada di luar tabel tetapi masih berada dalam interval–interval data yang ada yaitu $y[x_0, x_n]$ (Septiani, 2011).

Polinomial adalah suku banyak berderajat n, dengan n bilangan cacah. Sebuah polinomial dalam satu variabel dengan koefisien konstan memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 \tag{1}$$

dengan $a_n \neq 0$, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$ dinamakan koefisien, $x^n, x^{n-1}, \ldots, x^2, x$ dinamakan variabel berpangkat, $n, n-1, \ldots, 2{,}1$ dinamakan pangkat, dan a_0 dinamakan suku tetap. Dengan $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$ adalah bilangan bulat (Kusuma, 2016).

Fungsi interpolasi biasanya dipilih dari sekelompok fungsi tertentu. Penyelesaian fungsi polinomial dengan menggunakan metode interpolasi telah dilakukan dalam penelitian tentang perbandingan antara metode Lagrange dan metode Newton pada permasalahan interpolasi polinom pergerakan harga saham (Muhammad, 2010:6). Kesimpulan yang didapat dalam penelitian tersebut adalah metode Lagrange lebih unggul dibandingkan metode Newton.

Salah satu fungsi polinomial yang sering dipakai dalam interpolasi adalah fungsi polinomial Legendre. Polinomial Legendre dapat didefinisikan beserta sifat-sifatnya pada tingkat pertama sebagai fungsi khusus yaitu $P_r(x)$, dengan:

$$P_{r+1}(x) = \frac{(2r+1)xP_r(x) - rP_{r-1}(x)}{r+1} \qquad (2)$$

dengan kondisi awal $P_0(x) = 1$ dan $P_1(x) = x$ (Olagunju & Olaniregun, 2012:14-19).

Penyelesaian polinomial Legendre sebelumnya telah dilakukan dalam penelitian "*Multiple root finder algorithm for Legendre and Chebyshev polynomials via Newton's method*" (Barrera, etc., 2006:3-13). Penelitian ini menunjukkan bahwa teknik numerik berdasarkan metode Newton dapat digunakan untuk menentukan akar-akar dari polinomial Legendre dan Chebyshev dengan penggunaan lebih sedikit iterasi dari standar metode Newton. Hasil yang diperoleh juga dapat dibandingkan dengan metode penentuan akar-akar polinomial Chebyshev dengan formula analitik. Algoritma yang dihasilkan menjamin kesesuaian nilai akar sedikitnya hingga sembilan digit desimal.

Berbagai metode dikenal sebagai cara untuk menyelesaikan/menentukan akar-akar polinom, diantaranya metode penyelesaian polinom Newton dan Algoritma Neville. Polinom Newton dapat ditulis dalam bentuk polinom yang lengkap sebagai berikut:

$$P_0(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0] + \\ (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] \qquad (3)$$

Karena tetapan a_0, a_1, a_2, ..., a_n merupakan nilai selisih terbagi, maka polinom Newton dinamakan juga polinom interpolasi selisih terbagi Newton. Nilai selisih terbagi ini dapat dihitung dengan menggunakan tabel yang disebut tabel selisih terbagi.

Sedangkan algoritma Neville adalah suatu cara berulang untuk menentukan nilai pada tabel untuk suatu kolom pada waktu yang bersamaan, dari arah kiri ke kanan. Hal ini terjadi seperti hubungan antara "seorang anak perempuan" P dan kedua "orang tua".

$$P_{i(i+1)\dots\dots(i+m)}(x) = \frac{(x - x_{i+m})P_{i(i+1)\dots\dots(i+m-1)}(x) + (x_i - x)P_{(i+1)(i-1)\dots(i+m)}(x)}{x_i - x_{i+m}} \qquad (4)$$

Pengulangan ini terjadi karena telah ditentukan pada nilai $x_{i+1} \dots x_{i+m-1}$ (Press, 1992: 109).

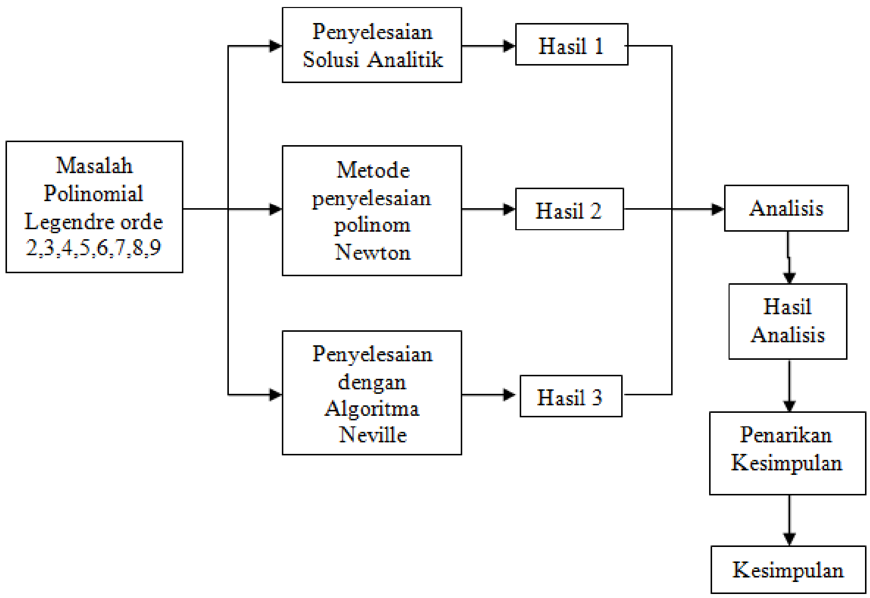
Berdasarkan pembahasan diatas dapat ditentukan rumusan masalah penelitian adalah "bagaimana analisis perbandingan keakuratan metode penyelesaian polinom Newton dan Algoritma Neville dalam Interpolasi Polinomial Legendre?". Hasil penelitian diharapkan dapat menambah referensi tentang penerapan metode penyelesaian polinom Newton dan Algoritma Neville dalam Interpolasi Polinomial Legendre.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian *verificative research*, yaitu penelitian yang bertujuan untuk menguji suatu teori atau hasil penelitian sebelumnya, sehingga diperoleh hasil yang memperkuat atau menggugurkan teori atau hasil penelitian sebelumnya (Umar, 2009). Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder, yaitu delapan fungsi Polinomial Legendre sebagai berikut: $P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$, $P_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2}$, $P_4(x) = \frac{35x^4-30x^2+3}{8}$, $P_5(x) = \frac{63x^5-70x^3+15x}{8}$, $P_6(x) = \frac{231x^6-315x^4+105x^2-5}{16}$, $P_7(x) = \frac{429x^7-693x^5+315x^3-35x}{16}$, $P_8(x) = \frac{6435x^8-12012x^6+6930x^4-1260x^2+35}{128}$, $P_9(x) = \frac{12155x^9-25740x^7+18018x^5-4620x^3+315x}{128}$.

Penelitian diawali dengan melakukan kajian teori dari buku dan artikel jurnal tentang interpolasi Polinomial Legendre, metode penyelesaian polinom Newton dan Algoritma Neville. Selanjutnya literatur digunakan sebagai panduan untuk menyelesaikan interpolasi delapan fungsi Polinomial Legendre. Perhitungan interpolasi delapan fungsi Polinomial Legendre diselesaikan dengan menggunakan solusi analitik dan metode numerik. Solusi analitik yang digunakan berupa penyelesaian matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah baku. Nilai yang diperoleh merupakan nilai sebenarnya (*exact solution*). Sedangkan, untuk metode numerik diselesaikan dengan menggunakan metode penyelesaian polinom Newton dan Algoritma Neville dengan nilai yang diperoleh adalah nilai hampiran (*approximation*).

Langkah-langkah penelitian tergambar dalam skema berikut:



Gambar 1. Skema Langkah-langkah Penelitian

Analisis data dilakukan dengan membandingkan hasil yang diperoleh dari solusi analitik dan metode numerik. Nilai yang diperoleh dari metode penyelesaian polinom Newton dan Algoritma Neville dibandingkan dengan nilai yang diperoleh secara analitik untuk mendapatkan nilai *relative error.* Selanjutnya, dilakukan perhitungan besar nilai *relative error* yang muncul pada metode penyelesaian polinom Newton dan Algoritma Neville, sebagai evaluasi untuk membandingkan antar solusi yang digunakan. Hasil *relative error* yang diperoleh selanjutnya ditarik kesimpulan untuk menjawab rumusan masalah.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil penelitian ini merupakan penyelesaian dari fungsi polinom Legendre yang ditentukan secara analitik (manual) dan secara numerik dengan metode penyelesaian polinom Newton dan algoritma Neville. Untuk mempermudah proses penentuan hasil penelitian digunakan *software maple 13*.

Hasil Perhitungan Fungsi $f(x) = \frac{3x^2-1}{2}$ dengan $x = 2$ secara analitik dapat ditentukan sebagai: $f(2) = \frac{3(2)^2-1}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5$. Adapun penyelesaian dengan metode penyelesaian polinom Newton dapat dilakukan dengan menggunakan tiga titik, yaitu: $(1{,}1), (3{,}13)$, dan $(5{,}37)$. Penyelesaian fungsi dapat ditentukan sebagai berikut :

Tabel 1. Penyelesaian Fungsi $f(x) = \frac{3x^2-1}{2}$ dengan Metode Penyelesaian Polinom Newton

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	ST-1 = a_1	ST-2 = a_2
0	$x_0 = 1$	1	$\frac{13-1}{3-1} = \frac{12}{2} = 6$	$\frac{12-6}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
1	$x_1 = 3$	13	$\frac{37-13}{5-3} = \frac{24}{2} = 12$	
2	$x_2 = 5$	37		

Berdasarkan tabel tersebut dapat ditentukan:

$$\begin{aligned} P_2(x) = f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &= 1 + 6(x-1) + \tfrac{3}{2}(x-1)(x-3) \\ &= 1 + 6x - 6 + \tfrac{3}{2}x^2 - 6x + \tfrac{9}{2} \\ &= \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{9}{2} - 5 \\ &= \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Akibatnya dapat diperoleh:

$$f(2) = \tfrac{3}{2}(2)^2 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{11}{2} = 5{,}5$$

Penyelesaian fungsi $f(x) = \frac{3x^2-1}{2}$ dengan algoritma Neville dilakukan dengan nilai $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$. Akibatnya dapat diperoleh $f(x_0) = f(1) = 1$, $f(x_1) = f(3) = 13$, dan $f(x_2) = f(5) = 37$. Untuk $x = 2$, dapat ditentukan sebagai berikut: $P_{0,0}(2) = f(x_0) = 1$, $P_{1,1}(2) = f(x_1) = 13$, dan $P_{2,2}(2) = f(x_2) = 37$.

Akibatnya $P_{0,1}(2), P_{1,2}(2)$ dan $P_{0,2}(2)$ dapat ditentukan sebagai berikut:

$$P_{0,1}(2) = \frac{(x_1 - x)P_{0,0}(x) + (x - x_0)P_{1,1}(x)}{x_1 - x_0}$$

$$= \frac{(3-2)1+(2-1)13}{3-1}$$

$$= \frac{1+13}{2}$$

$$= 7$$

$$P_{1,2}(2) = \frac{(x_2-x)P_{1,1}(x)+(x-x_1)P_{2,2}(x)}{x_2-x_1}$$

$$= \frac{(5-2)13+(2-3)37}{5-3}$$

$$= \frac{39-37}{2}$$

$$= 1$$

$$P_{0,2}(2) = \frac{(x_2-x)P_{0,1}(x)+(x-x_0)P_{1,2}(x)}{x_2-x_1}$$

$$= \frac{(5-2)7+(2-1)1}{5-1}$$

$$= \frac{21+1}{4}$$

$$= 5{,}5$$

Pada perhitungan analitik didapatkan nilai eksak dari $f(2) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = 5{,}5$. Sehingga nilai *Relative Error* dengan metode penyelesaian Polinom Newton adalah : $\varepsilon_a = |a - \bar{a}| = |5{,}5 - 5{,}5| = 0$ dan $\varepsilon_r = \left|\frac{\varepsilon_a}{\alpha}\right| \times 100\% = \left|\frac{0}{5{,}5}\right| \times 100\% = 0\%$. Adapun nilai *Relative Error* dengan algoritma Neville adalah : $\varepsilon_a = |a - \bar{a}| = |5{,}5 - 5{,}5| = 0$ dan $\varepsilon_r = \left|\frac{\varepsilon_a}{\alpha}\right| \times 100\% = \left|\frac{0}{5{,}5}\right| \times 100\% = 0\%$. Jadi *relative errornya* adalah 0 %.

Berdasarkan proses yang telah dilakukan, dengan cara yang sama dapat diperoleh hasil penyelesaian untuk fungsi-fungsi selanjutnya sebagai berikut.

Tabel 2. Hasil Penyelesaian Fungsi Polinom Lagrange dengan Solusi Analitik, Metode Penyelesaian Polinom Newton, dan Algoritma Neville, serta Nilai Relative Error

FUNGSI	SOLUSI ANALITIK	METODE PENYELESAIAN POLINOM NEWTON	RELATIVE ERROR	ALGORITMA NEVILLE	RELATIVE ERROR
$f(x)=\frac{3x^2-1}{2}$	5.500000000	5.500000000	0 %	5.500000000	0 %
$f(x)=\frac{5x^3-3x}{2}$	1043,4375	1043,4375	0 %	1043,4375	0 %
$f(x)=\frac{35x^4-30x^2+3}{8}$	321	321	0 %	320.9999994	0 %
$f(x)=\frac{63x^5-70x^3+15x}{8}$	13742.68359375	13742,68359375	0 %	13742,68359375	0 %
$f(x)=\frac{231x^6-315x^4+105x^2-5}{16}$	381822,15917968	381822,15917968	0 %	381822,15917968	0 %
$f(x)=\frac{429x^7-693x^5+315x^3-35x}{16}$	371773674,1	371773674,1	0 %	371773674,5	0,0000001076%
$f(x)=\frac{6435x^8-12012x^6+6930x^4-1260x^2+35}{128}$	58,73938022	58,73938022	0 %	58,73937695	0,0000005567%
$f(x)=\frac{12155x^9-25740x^7+18018x^5-4620x^3+315x}{128}$	30463322582899	30463322582899	0 %	30463322582899	0 %

Berdasarkan nilai *relative error* (ε_r) yang diperoleh, dapat diketahui hasil perbandingan ε_r (*relative error*) dari metode yang digunakan, yaitu metode penyelesaian polinom Newton mempunyai rata-rata ε_r sebesar 0% dengan nilai ε_r lebih kecil dibandingkan dengan rata-rata nilai ε_r Algoritma Neville yaitu sebesar 0,0000284767%. Artinya metode penyelesaian polinom Newton merupakan metode interpolasi yang lebih akurat digunakan untuk masalah interpolasi fungsi Legendre dibandingkan dengan Algoritma Neville.

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Penyelesaian interpolasi pada delapan fungsi Legendre yang diberikan dengan menerapkan metode penyelesaian polinom Newton mendapatkan hasil yang sama dengan nilai analitiknya dan mendapatkan rata-rata ε_r sebesar 0%. Tiga penyelesaian interpolasi dari delapan fungsi Legendre yang diberikan dengan menerapkan Algoritma Neville menunjukkan hasil yang berbeda dengan nilai analitiknya dan mendapatkan rata-rata ε_r sebesar 0,0000284767%, yaitu penyelesaian interpolasi fungsi Legendre orde 4, 7, dan 9. Sedangkan lima penyelesaian interpolasi fungsi Legendre yang lain menunjukkan hasil yang sama dengan nilai analitiknya dan mendapatkan rata-rata ε_r sebesar 0 %, yaitu penyelesaian interpolasi fungsi Legendre orde 1, 2, 3, 5, dan 6.

Perbandingan yang dilakukan dari hasil perhitungan antara menggunakan metode penyelesaian polinom Newton dan Algoritma Neville menunjukkan bahwa metode penyelesaian polinom Newton merupakan metode yang lebih akurat digunakan untuk masalah interpolasi fungsi Legendre yang diberikan dibandingkan dengan Algoritma Neville. Hal ini dapat dilihat dari hasil rata-rata *relative error* (ε_r) yang didapatkan, yaitu sebesar 0% untuk metode penyelesaian polinom Newton dan sebesar 0,0000284767% untuk Algoritma Neville.

Metode penyelesaian polinom Newton dan Algoritma Neville yang digunakan dalam penyelesaian fungsi Legendre dilakukan dengan batas yang konstan. Pada penelitian berikutnya, dapat dianalisis solusi untuk fungsi Legendre dengan menggunakan metode-metode penyelesaian yang lain seperti Algoritma Aitken metode polinom interpolasi Newton-Gregory maju atau mundur dengan titik yang berjarak sama, metode interpolasi Hermit, Systolic Array dan sebagainya.

5. REFERENSI

Barrera-Figueroaa, V., Sosa-Pedrozab, J., & López-Bonilla, J. (2006). Multiple Root Finder Algorithm for Legendre and Chebyshev Polynomials via Newton's Method. *Annales Mathematicae et Informaticae* , 3-13.

Kusuma, N. F. (2016). Perkongruenan Plonomial Modulo m. *Konferensi Nasional Penelitian Matematika dan Pembelajarannya (KNPMP I)* (pp. 2502-2512). Surakarta: Universitas Muhammadiyah.

Muhammad, D. (2011). *Penggunaan Metode Newton dan Lagrange pada Interpolasi Polinom Pergerakan Harga Saham: Studi Kasus PT Adaro Energi Tbk.* Bandung: Institut Teknologi Bandung.

Olagunju, A. S., & Olaniregun, D. (2012). Legendre-coefficients Comparison Methods for the Numerical Solution of a Class of Ordinary Differential Equations. *IOSR Journal of Mathematics (IOSRJM)* , 14-19.

Press, W. H. (1992). *Numerical Recipes in C The Art of Scientific Computing Second Edition.* New York: Cambridge University Press.

Sahid. (2005). *Pengantar Komputasi Numerik dengan MATLAB* . Yogyakarta: Andi.

Septiani, N. W. (2011). Aplikasi Perhitungan Interpolasi Newton dengan Borland Delphi 5.0. *JIFE Vol. 4 No. 1* , 16-28.

Umar, H. (2009). *Metode Penelitian untuk Skripsi dan Tesis Bisnis.* Jakarta: Rajawali.