

Analisis Numerik Model Matematika Vibrasi Dawai *Flying Fox* Menggunakan Metode *Collocation* dengan Interpolasi Lagrange Tiga Titik

Syafitri Hidayahningrum¹, Ari Kusumastuti²

¹ Program Studi Matematika, Universitas Brawijaya, Malang, Indonesia

² Jurusan Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang, Indonesia

Email korespondensi: syafitri.hidayahningrum.31@gmail.com

Abstrak

Di dalam artikel ini dibahas mengenai analisis numerik untuk model matematika vibrasi dawai *flying fox* (Hidayahningrum & Kusumastuti, 2017) dengan menggunakan metode *Collocation* Interpolasi Lagrange tiga titik. Hasil yang diperoleh dibandingkan dengan model matematika jembatan Tacoma-Narrow yang dibentuk oleh McKenna (1993). Hal ini dikarenakan belum bisa mendapatkan bentuk solusi analitik dari model vibrasi dawai *flying fox* sehingga tidak dapat dibandingkan dengan solusi numeriknya. Diperoleh hasil bahwa grafik model yang terbentuk hampir sama dengan model jembatan Tacoma Narrow. Akan tetapi, nilai solusinya memiliki perbedaan yang cukup signifikan.

Kata kunci: analisis, numerik, vibrasi, dawai, *flying fox*

Abstract

This paper discussed the numerical analysis of mathematical model of flying fox string vibration (Hidayahningrum & Kusumastuti, 2017) using Collocation method with three points interpolation Lagrange. The result is compared with mathematical model of Tacoma-Narrow bridge is constructed by McKenna (1993). Because it has not been able to get the analytic solution of the flying fox string vibration model, so that it cannot be compared with its numerical solution. The result is obtained that the graph of the model is almost similar to the Tacoma Narrow bridge model. However, the solution value has a significant difference.

Key words: analysis, numerical, vibration, string, *flying fox*

PENDAHULUAN

Model matematika untuk vibrasi dawai *flying fox* melibatkan beberapa parameter, di antaranya (1) Panjang dawai (l), merupakan jarak dua buah ujung dawai. (2) Konstanta pegas (k), merupakan besaran yang mempengaruhi gaya pegas. (3) Koefisien gaya gesek (μ_k), merupakan besaran yang menunjukkan interaksi berpagesekan antara dawai *flying fox* dengan *sling* baja yang memuat beban. (4) Massa benda dan massa dawai *flying fox* masing-masing disimbolkan dengan (m_b) dan (m_d).

(5) Energi potensial dawai (EP) dan Energi kinetik (EK) yang terjadi pada dawai *flying fox*¹.

Penelitian ini membahas tentang analisis numerik dari model matematika vibrasi dawai *flying fox*². Model matematika vibrasi dawai *flying fox* memiliki dua persamaan diferensial biasa yang mewakili lendutan dawai dari posisi kesetimbangannya, $y(t)$, dan sudut yang terbentuk ketika dawai dikenai beban, $\theta(t)$. Persamaan yang akan dibahas dalam

penelitian ini adalah lendutan dan awai dari posisi kesetimbangannya, $y(t)$.

Metode numerik yang digunakan adalah metode *collocation* dengan interpolasi Lagrange titik. Metode *collocation* merupakan salah satu variasi metode pembobot residual dalam menyelesaikan persamaan diferensial⁶.

Sebelumnya, pernah dibahas mengenai solusi numerik dari model matematika vibrasi dawai *flying fox* menggunakan metode Runge-Kutta orde empat². Hasil yang diperoleh dibandingkan dengan solusi numerik dari model matematika jembatan Tacoma Narrow⁵. Selanjutnya, di tahun 2018, telah dilakukan penelitian menguji solusi analitik dan numerik dengan cara melinierkan model matematika vibrasi dawai *flying fox* untuk persamaan $y(t)$ dan $\theta(t)$ ⁴. Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui bentuk grafik model matematika vibrasi dawai *flying fox* khusus pada bentuk $y(t)$ dan membandingkannya dengan hasil dari metode RK-4.

METODE

Persamaan diferensial yang akan diuji adalah sebagai berikut

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 0,01 \frac{dy}{dt} - \frac{2,1242y}{\sqrt{y^2 + 2500}} - 9,8 = 0 \quad (1)$$

$$R(t_1) = \frac{0,43t^3 + 127,24t^2 - 159,55t + 36,78}{22,62t^4 - 56,54t^3 + 49,46t^2 - 17,66t + 2,12} - \frac{1}{\sqrt{(10,67t^4 - 26,67t^3 + 23,33t^2 - 8,33t + 1)^2 + 2500}} \quad (7)$$

$$R(t_2) = \frac{-1,71t^3 - 509,16t^2 + 574,61t - 148,3}{-90,46t^4 + 203,52t^3 - 146,98t^2 + 33,92t} - \frac{1}{\sqrt{(-42,67t^4 + 96t^3 - 69,33t^2 + 16t)^2 + 2500}} \quad (8)$$

dengan kondisi awal $y(0) = 1$ dan $\frac{dy(0)}{dt} = 0$.

Diambil 5 titik, yaitu $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1}{4}$, $t_3 = \frac{1}{2}$, $t_4 = \frac{3}{4}$, dan $t_5 = 1$, di mana titik $t_2 = \frac{1}{4}$, $t_3 = \frac{1}{2}$, dan $t_4 = \frac{3}{4}$ merupakan titik *collocation*³. Sehingga diperoleh persamaan Lagrange:

$$\ell_1(t) = 10,67t^4 - 26,67t^3 + 23,33t^2 - 8,33t + 1 \quad (2)$$

$$\ell_2(t) = -42,67t^4 + 96t^3 - 69,33t^2 + 16t \quad (3)$$

$$\ell_3(t) = 64t^4 - 32t^3 + 76t^2 - 12t \quad (4)$$

$$\ell_4(t) = -42,67t^4 + 74,67t^3 - 37,33t^2 + 5,33t \quad (5)$$

$$\ell_5(t) = 10,67t^4 - 16t^3 + 7,33t^2 - t \quad (6)$$

Persamaan (2), (3), (4), (5), (6) diturunkan sampai turunan kedua, kemudian disubstitusikan ke dalam bentuk

$$R(t) = \frac{d^2y}{dt^2} + 0,01 \frac{dy}{dt} - \frac{2,1242y}{\sqrt{y^2 + 2500}} - 9,8$$

diperoleh persamaan (7), (8), (9), (10), dan (11) berikut

$$R(t_3) = \frac{2,56t^3 + 767t^2 - 190,48t + 142,08}{\sqrt{(64t^4 - 32t^3 + 76t^2 - 12t)^2 + 2500}} - \frac{135,68t^4 - 67,84t^3 + 161,12t^2 - 25,44t}{\sqrt{(64t^4 - 32t^3 + 76t^2 - 12t)^2 + 2500}} \quad (9)$$

$$R(t_4) = \frac{-1,71t^3 - 509,8t^2 + 447,27t - 84,41}{\sqrt{(-42,67t^4 + 74,67t^3 - 37,33t^2 + 5,33t)^2 + 2500}} - \frac{-90,46t^4 + 158,30t^3 - 79,14t^2 + 11,3t}{\sqrt{(-42,67t^4 + 74,67t^3 - 37,33t^2 + 5,33t)^2 + 2500}} \quad (10)$$

$$R(t_5) = \frac{0,43t^3 + 127,56t^2 - 95,85t + 4,85}{\sqrt{(10,67t^4 - 16t^3 + 7,33t^2 - t)^2 + 2500}} - \frac{22,62t^4 - 33,92t^3 + 15,54t - 2,12t}{\sqrt{(10,67t^4 - 16t^3 + 7,33t^2 - t)^2 + 2500}} \quad (11)$$

Berdasarkan persamaan (7), (8), (9), (10) dan (11), maka residualnya masing-masing titik *collocation* adalah (persamaan (12), (13), dan (14))

$$R(x_2^c) = R\left(\frac{1}{4}\right) = 4,8499c_1 - 36,5424c_2 + 142,3764c_3 - 4,4799c_4 - 11,1299c_5 \quad (12)$$

$$R(x_3^c) = R\left(\frac{1}{2}\right) = -11,13c_1 + 11,4999c_2 + 238,3765c_3 + 11,56c_4 - 11,1299c_5 \quad (13)$$

$$R(x_4^c) = R\left(\frac{3}{4}\right) = -11,13c_1 - 4,47c_2 + 430,6316c_3 - 36,4824c_4 + 4,89c_5 \quad (14)$$

Berdasarkan kondisi awal $y(0) = 1$ dan menggunakan metode *collocation* dengan interpolasi Lagrange tiga titik berikut. $\frac{dy(0)}{dt} = 0$, serta persamaan $y(t) = \sum_{i=1}^5 c_i \ell_i(t)$, maka diperoleh nilai $c_1 = 1$ dan persamaan baru

$$y'(0) = -8,33 + 16c_2 - 12c_3 + 5,33c_4 - c_5 \quad (15)$$

$$y_a(t) = -0,0094t^4 - 0,0059t^3 + 5,3679t^2 + 0,0007t + 1 \quad (16)$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (12), (13), (14), dan (15) diperoleh nilai $c_2 = 0.7028$, $c_3 = -0.0266$, $c_4 = -0.9498$, dan $c_5 = -1.8291$. Oleh karena itu, diperoleh solusi aproksimasi $y(t)$ model vibrasi dawai *flying fox*

HASIL

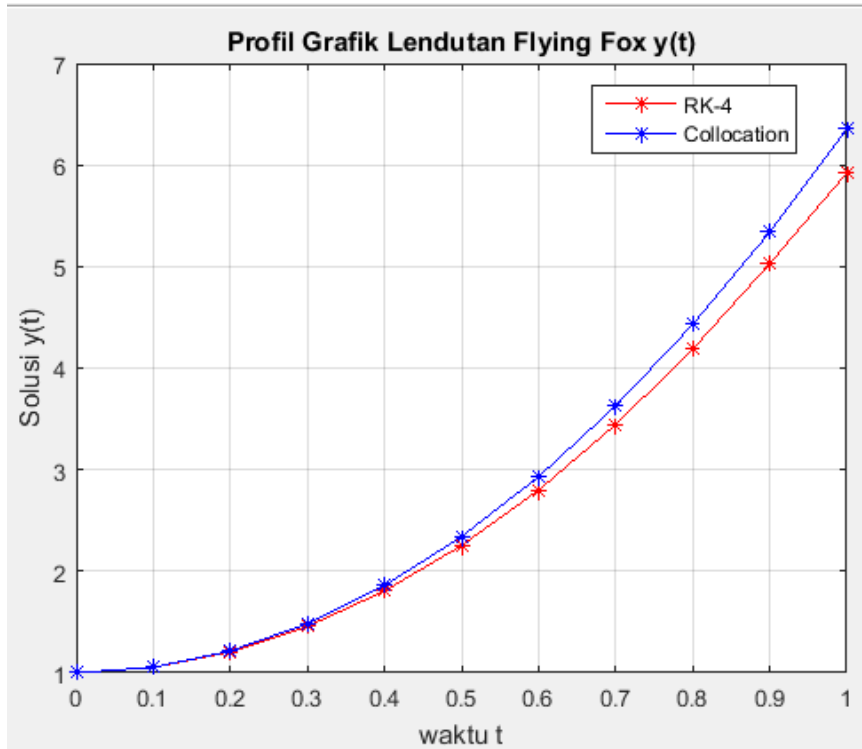
Setelah diperoleh solusi aproksimasi menggunakan metode *collocation* dengan interpolasi Lagrange tiga titik, selanjutnya membandingkan nilai solusinya dengan metode RK-4 seperti pada Tabel 1.

Tabel 1. Perbandingan Nilai Solusi $y(t)$ Menggunakan Metode RK-4 dan *Collocation* dengan Interpolasi Lagrange Tiga Titik

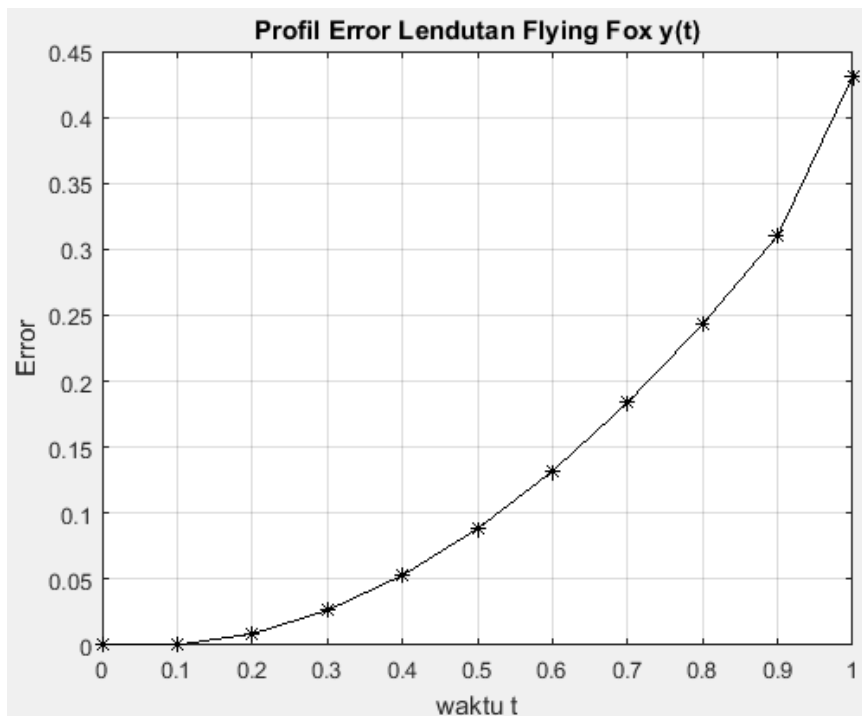
Waktu	Nilai $y(t)$		Error
	RK-4	<i>Collocation</i>	
0	1,0000	1,0000	0,0000
0,1	1,0540	1,0537	0,0003
0,2	1,2062	1,2148	0,0086
0,3	1,4567	1,4831	0,0264
0,4	1,8056	1,8585	0,0529
0,5	2,2528	2,3410	0,0882
0,6	2,7985	2,9304	0,1319
0,7	3,4428	3,6265	0,1837

0,8	4,1858	4,4291	0,2433
0,9	5,0279	5,3382	0,3103
1	5,9222	6,3533	0,4311

Berdasarkan Tabel 1, maka solusi $y(t)$ model dapat dilihat pada grafik Gambar 1 dan Gambar matematika vibrasi dawai *flying fox* 2 berikut ini.



Gambar 1. Plot Grafik Perbandingan Metode RK-4 dan Collocation untuk Model Matematika Vibrasi Dawai *Flying Fox* $y(t)$.



Gambar 2. Plot Error Metode RK-4 dan Collocation untuk Model Matematika Vibrasi Dawai Flying Fox $y(t)$.

PEMBAHASAN

Berdasarkan hasil pada sub bab sebelumnya, terlihat bahwa nilai solusi dari model matematika vibrasi dawai flying fox untuk persamaan $y(t)$ menggunakan metode RK-4 dan collocation dengan interpolasi Lagrange tiga titik hampir sama. Grafik yang terbentuk berupa grafik monoton naik pada interval $[0,1]$. Dengan mengambil waktu dalam interval $[0,1]$ dan beda langkah 0,1, diperoleh rata-rata nilai error-nya sebesar 0,1342. Hasil yang diperoleh belum dapat dibandingkan dengan solusi analitiknya, dikarenakan persamaan $y(t)$ dari model matematika vibrasi dawai flying fox berbentuk persamaan nonlinier.

KESIMPULAN

Diperlukan pemecahan solusi analitik dari model matematika vibrasi dawai flying fox agar dapat dibandingkan dengan solusi numerik,

sehingga dapat diketahui kebenaran dari model matematika yang telah dikonstruksi.

DAFTAR PUSTAKA

1. Halliday D. Fisika Dasar Edisi Ketujuh, Jilid II. Jakarta: Erlangga. 2010.
2. Hidayahningrum S, Kusumastuti A. Konstruksi Model Matematika Vibrasi Dawai Flying Fox. 2017.
3. Kajotoni, MM. A Comparative Study of Collocation Methods for the Numerical Solution of Differential Equations. Tesis. 2008.
4. Maulidasari D. Analisis Uji Validasi Model Matematika Vibrasi Dawai Flying Fox. Skripsi. 2018.
5. McKenna PJ. The Global Structure of Periodic Solutions to a Suspension Bridge Mechanical Model. IMAJ Applied Math, 1993;67(5): 459-478.
6. Spiegel, MR. Advanced Mathematics for Engineers and Scientists. Great Britain: McGraw-Hill Inc. 1971.